الصيف سلا.

2017 - 2018

Examen (1h45)°

Exercice 1 1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé et $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telque pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} = \lambda$.*
Donner un vecteur propre de la matrice A.

2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée diagonalisable. Montrer qu'il existe une matrice carrée $B \in M_n(\mathbb{C})$ telque $B^3 = A$.*

Exercice 2 *Dans $M_3(\mathbb{R})$, soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est t-elle diagonalisable ? Justifier par trois méthodes.

Exercice 3 *Dans $M_3(\mathbb{R})$, soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4 *Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ et q sa forme quadratique associée définie pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

1. *Déterminer la forme bilinéaire symétrique f associée à q.*
2. *Donner une réduction de Gauss de q.*
3. *Donner une base orthogonal de q.*
4. *Donner la signature et le rang de q .*
5. *Soit $A := \{(1, 1, 1)\}$. Déterminer une base de $A^{\perp}$.*

Répondre
Plus
Modifier

الصيف سلا.

2017 - 2018

Examen (1h45)°

Exercice 1 1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé et $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telque pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} = \lambda$.*
Donner un vecteur propre de la matrice A.

2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée diagonalisable. Montrer qu'il existe une matrice carrée $B \in M_n(\mathbb{C})$ telque $B^3 = A$.*

Exercice 2 *Dans $M_3(\mathbb{R})$, soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est t-elle diagonalisable ? Justifier par trois méthodes.

Exercice 3 *Dans $M_3(\mathbb{R})$, soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4 *Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ et q sa forme quadratique associée définie pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

1. *Déterminer la forme bilinéaire symétrique f associée à q.*
2. *Donner une réduction de Gauss de q.*
3. *Donner une base orthogonal de q.*
4. *Donner la signature et le rang de q .*
5. *Soit $A := \{(1, 1, 1)\}$. Déterminer une base de $A^{\perp}$.*

Répondre
Plus
Modifier

الصيف سلا.

2017 - 2018

Examen (1h45)°

Exercice 1 1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé et $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telque pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} = \lambda$.*
Donner un vecteur propre de la matrice A.

2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée diagonalisable. Montrer qu'il existe une matrice carrée $B \in M_n(\mathbb{C})$ telque $B^3 = A$.*

Exercice 2 *Dans $M_3(\mathbb{R})$, soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est t-elle diagonalisable ? Justifier par trois méthodes.

Exercice 3 *Dans $M_3(\mathbb{R})$, soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4 *Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ et q sa forme quadratique associée définie pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

1. *Déterminer la forme bilinéaire symétrique f associée à q.*
2. *Donner une réduction de Gauss de q.*
3. *Donner une base orthogonal de q.*
4. *Donner la signature et le rang de q .*
5. *Soit $A := \{(1, 1, 1)\}$. Déterminer une base de $A^{\perp}$.*

Répondre
Plus
Modifier

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
École nationale des sciences appliquées de Fès
Matière : Algèbre II

Année : 2018/2019
Filière : CP1
Semestre : S_2

Examen de la session normale : Durée $2h$

Exercice 1 :

Soit D une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$D = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de D.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = -4,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés puis en déduire que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.
3. En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère les polynômes $A = X^{12} + X^{10} + X^8$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Factoriser le polynôme B et en déduire ses racine dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'ils existent $Q \in \mathbb{C}[X]$ et a, b, c dans $\mathbb{C}$ tels que :
   $X^{12} + X^{10} + X^8 = (X^3 + X^2 + X + 1)Q + aX^2 + bX + c$.
3. Déterminer a, b, c et en déduire le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 4 :

I- Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

(1) $\dfrac{X^3 + 2X}{(X-2)(X+2)(X-4)}$, (2) $\dfrac{X^3}{(X-1)^3}$, (3) $\dfrac{X^4 + 1}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

II- Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
École nationale des sciences appliquées de Fès
Matière : Algèbre II

Année : 2018/2019
Filière : CP1
Semestre : S_2

Examen de la session normale : Durée $2h$

Exercice 1 :

Soit D une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$D = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de D.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = -4,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés puis en déduire que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.
3. En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère les polynômes $A = X^{12} + X^{10} + X^8$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Factoriser le polynôme B et en déduire ses racine dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'ils existent $Q \in \mathbb{C}[X]$ et a, b, c dans $\mathbb{C}$ tels que :
   $X^{12} + X^{10} + X^8 = (X^3 + X^2 + X + 1)Q + aX^2 + bX + c$.
3. Déterminer a, b, c et en déduire le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 4 :

I- Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

(1) $\dfrac{X^3 + 2X}{(X-2)(X+2)(X-4)}$, (2) $\dfrac{X^3}{(X-1)^3}$, (3) $\dfrac{X^4 + 1}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

II- Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
École nationale des sciences appliquées de Fès
Matière : Algèbre II

Année : 2018/2019
Filière : CP1
Semestre : S_2

Examen de la session normale : Durée $2h$

Exercice 1 :

Soit D une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$D = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de D.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = -4,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés puis en déduire que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.
3. En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère les polynômes $A = X^{12} + X^{10} + X^8$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Factoriser le polynôme B et en déduire ses racine dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'ils existent $Q \in \mathbb{C}[X]$ et a, b, c dans $\mathbb{C}$ tels que :
   $X^{12} + X^{10} + X^8 = (X^3 + X^2 + X + 1)Q + aX^2 + bX + c$.
3. Déterminer a, b, c et en déduire le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 4 :

I- Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

(1) $\dfrac{X^3 + 2X}{(X-2)(X+2)(X-4)}$, (2) $\dfrac{X^3}{(X-1)^3}$, (3) $\dfrac{X^4 + 1}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

II- Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
École nationale des sciences appliquées de Fès
Matière : Algèbre II

Année : 2018/2019
Filière : CP1
Semestre : S_2

Examen de la session normale : Durée $2h$

Exercice 1 :

Soit D une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$D = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de D.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = -4,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés puis en déduire que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.
3. En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère les polynômes $A = X^{12} + X^{10} + X^8$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Factoriser le polynôme B et en déduire ses racine dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'ils existent $Q \in \mathbb{C}[X]$ et a, b, c dans $\mathbb{C}$ tels que :
   $X^{12} + X^{10} + X^8 = (X^3 + X^2 + X + 1)Q + aX^2 + bX + c$.
3. Déterminer a, b, c et en déduire le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 4 :

I- Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

(1) $\dfrac{X^3 + 2X}{(X-2)(X+2)(X-4)}$, (2) $\dfrac{X^3}{(X-1)^3}$, (3) $\dfrac{X^4 + 1}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

II- Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
École nationale des sciences appliquées de Fès
Matière : Algèbre II

Année : 2018/2019
Filière : CP1
Semestre : S_2

Examen de la session normale : Durée $2h$

Exercice 1 :

Soit D une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$D = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de D.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = -4,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés puis en déduire que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.
3. En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère les polynômes $A = X^{12} + X^{10} + X^8$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Factoriser le polynôme B et en déduire ses racine dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'ils existent $Q \in \mathbb{C}[X]$ et a, b, c dans $\mathbb{C}$ tels que :
   $X^{12} + X^{10} + X^8 = (X^3 + X^2 + X + 1)Q + aX^2 + bX + c$.
3. Déterminer a, b, c et en déduire le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 4 :

I- Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

(1) $\dfrac{X^3 + 2X}{(X-2)(X+2)(X-4)}$, (2) $\dfrac{X^3}{(X-1)^3}$, (3) $\dfrac{X^4 + 1}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

II- Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
École nationale des sciences appliquées de Fès
Matière : Algèbre II

Année : 2018/2019
Filière : CP1
Semestre : S_2

Examen de la session normale : Durée $2h$

Exercice 1 :

Soit D une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$D = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de D.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = -4,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés puis en déduire que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.
3. En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère les polynômes $A = X^{12} + X^{10} + X^8$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Factoriser le polynôme B et en déduire ses racine dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'ils existent $Q \in \mathbb{C}[X]$ et a, b, c dans $\mathbb{C}$ tels que :
   $X^{12} + X^{10} + X^8 = (X^3 + X^2 + X + 1)Q + aX^2 + bX + c$.
3. Déterminer a, b, c et en déduire le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 4 :

I- Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

(1) $\dfrac{X^3 + 2X}{(X-2)(X+2)(X-4)}$, (2) $\dfrac{X^3}{(X-1)^3}$, (3) $\dfrac{X^4 + 1}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

II- Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

Université Sdi Mohamed Ben Abdellah
École Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Année 2016-2017
Filière : CP1
Algébre2

Examen - Algébre2, S2 durée 2h

Session Normale

Exercice 1. (6 points)

1) Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?.

2) On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elle diagonalisables ? justifier vos réponses.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux réels a, b pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

4) Calculer les puissances de A.

Exercice 2. (4 points)

Soit u un réel quelconque, n un entier positif quelconque et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+u & u & u & \dots & u \\ u & 1+u & u & \dots & u \\ u & u & 1+u & \dots & . \\ . & . & . & . & \\ u & u & . & .. & 1+u \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $\det A = 1 + nu$.

Exercice 3. (5 points)

Soit $P = X^4 - X^3 + 8X^2 - 5X + 15$ et $Q = 3X^4 + 3X^3 + 18X^2 + 15X + 15$.

1) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

2) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

Exercice 4. (5 points)

1) Factoriser le polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{C}$.

2) En déduire la factorisation du polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle : $\dfrac{1}{X^6 - 1}$.

4) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :

$$\frac{X^3 + 1}{X(X^2 + 1)}$$

Université Sdi Mohamed Ben Abdellah
École Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Année 2016-2017
Filière : CP1
Algébre2

Examen - Algébre2, S2 durée 2h

Session Normale

Exercice 1. (6 points)

1) Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?.

2) On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elle diagonalisables ? justifier vos réponses.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux réels a, b pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

4) Calculer les puissances de A.

Exercice 2. (4 points)

Soit u un réel quelconque, n un entier positif quelconque et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+u & u & u & \dots & u \\ u & 1+u & u & \dots & u \\ u & u & 1+u & \dots & . \\ . & . & . & . & \\ u & u & . & .. & 1+u \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $\det A = 1 + nu$.

Exercice 3. (5 points)

Soit $P = X^4 - X^3 + 8X^2 - 5X + 15$ et $Q = 3X^4 + 3X^3 + 18X^2 + 15X + 15$.

1) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

2) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

Exercice 4. (5 points)

1) Factoriser le polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{C}$.

2) En déduire la factorisation du polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle : $\dfrac{1}{X^6 - 1}$.

4) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :

$$\frac{X^3 + 1}{X(X^2 + 1)}$$

Université Sdi Mohamed Ben Abdellah
École Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Année 2016-2017
Filière : CP1
Algébre2

Examen - Algébre2, S2 durée 2h

Session Normale

Exercice 1. (6 points)

1) Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?.

2) On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elle diagonalisables ? justifier vos réponses.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux réels a, b pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

4) Calculer les puissances de A.

Exercice 2. (4 points)

Soit u un réel quelconque, n un entier positif quelconque et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+u & u & u & \dots & u \\ u & 1+u & u & \dots & u \\ u & u & 1+u & \dots & . \\ . & . & . & . & \\ u & u & . & .. & 1+u \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $\det A = 1 + nu$.

Exercice 3. (5 points)

Soit $P = X^4 - X^3 + 8X^2 - 5X + 15$ et $Q = 3X^4 + 3X^3 + 18X^2 + 15X + 15$.

1) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

2) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

Exercice 4. (5 points)

1) Factoriser le polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{C}$.

2) En déduire la factorisation du polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle : $\dfrac{1}{X^6 - 1}$.

4) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :

$$\frac{X^3 + 1}{X(X^2 + 1)}$$

Université Sdi Mohamed Ben Abdellah
École Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Année 2016-2017
Filière : CP1
Algébre2

Examen - Algébre2, S2 durée 2h

Session Normale

Exercice 1. (6 points)

1) Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?.

2) On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elle diagonalisables ? justifier vos réponses.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux réels a, b pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

4) Calculer les puissances de A.

Exercice 2. (4 points)

Soit u un réel quelconque, n un entier positif quelconque et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+u & u & u & \dots & u \\ u & 1+u & u & \dots & u \\ u & u & 1+u & \dots & . \\ . & . & . & . & \\ u & u & . & .. & 1+u \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $\det A = 1 + nu$.

Exercice 3. (5 points)

Soit $P = X^4 - X^3 + 8X^2 - 5X + 15$ et $Q = 3X^4 + 3X^3 + 18X^2 + 15X + 15$.

1) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

2) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

Exercice 4. (5 points)

1) Factoriser le polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{C}$.

2) En déduire la factorisation du polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle : $\dfrac{1}{X^6 - 1}$.

4) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :

$$\frac{X^3 + 1}{X(X^2 + 1)}$$

Université Sdi Mohamed Ben Abdellah
École Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Année 2016-2017
Filière : CP1
Algébre2

Examen - Algébre2, S2 durée 2h

Session Normale

Exercice 1. (6 points)

1) Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?.

2) On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elle diagonalisables ? justifier vos réponses.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux réels a, b pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

4) Calculer les puissances de A.

Exercice 2. (4 points)

Soit u un réel quelconque, n un entier positif quelconque et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+u & u & u & \dots & u \\ u & 1+u & u & \dots & u \\ u & u & 1+u & \dots & . \\ . & . & . & . & \\ u & u & . & .. & 1+u \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $\det A = 1 + nu$.

Exercice 3. (5 points)

Soit $P = X^4 - X^3 + 8X^2 - 5X + 15$ et $Q = 3X^4 + 3X^3 + 18X^2 + 15X + 15$.

1) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

2) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

Exercice 4. (5 points)

1) Factoriser le polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{C}$.

2) En déduire la factorisation du polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle : $\dfrac{1}{X^6 - 1}$.

4) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :

$$\frac{X^3 + 1}{X(X^2 + 1)}$$

Université Sdi Mohamed Ben Abdellah
École Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Année 2016-2017
Filière : CP1
Algébre2

Examen - Algébre2, S2 durée 2h

Session Normale

Exercice 1. (6 points)

1) Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?.

2) On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elle diagonalisables ? justifier vos réponses.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux réels a, b pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

4) Calculer les puissances de A.

Exercice 2. (4 points)

Soit u un réel quelconque, n un entier positif quelconque et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+u & u & u & \dots & u \\ u & 1+u & u & \dots & u \\ u & u & 1+u & \dots & . \\ . & . & . & . & \\ u & u & . & .. & 1+u \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $\det A = 1 + nu$.

Exercice 3. (5 points)

Soit $P = X^4 - X^3 + 8X^2 - 5X + 15$ et $Q = 3X^4 + 3X^3 + 18X^2 + 15X + 15$.

1) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

2) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$. Determiner le PGCD de P et Q.

Exercice 4. (5 points)

1) Factoriser le polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{C}$.

2) En déduire la factorisation du polynôme $X^6 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle : $\dfrac{1}{X^6 - 1}$.

4) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :

$$\frac{X^3 + 1}{X(X^2 + 1)}$$

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès
Année Universitaire 2015-2016

Examen d'Algèbre II
Durée 2h

Exercice 1 *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle suivante :* $1/(X^4-1)$.

Exercice 2 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n *pour tout entier naturel* n.

Exercice 3 *Soit* A *une matrice carrée telque* $A^{2016} = 0$ *et* $A^{2015} \neq 0$.

1. *Calculer le polynôme minimal de* A.
2. *A est -elle diagonalisable ? Justifier par deux méthodes différentes.*

Exercice 4 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* 3 *tel que,* $A^3 - 3A^2 = -2A$.

1. *Trouver les valeurs propres possible de* A.
2. *Déduire que* A *est diagonalisable.*

Exercice 5

1. *Caractériser une matrice qui est à la fois diagonalisable et nilpotente.*
2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé et* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée telque pour tout* $i = 1, \ldots, n$, *on a* $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} = \lambda$.
   Donner un vecteur propre de la matrice A.
3. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *une matrice carrée diagonalisable. Montrer qu'il existe une matrice carrée* $B \in M_n(\mathbb{C})$ *telque* $B^2 = A$.

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès
Année Universitaire 2015-2016

Examen d'Algèbre II
Durée 2h

Exercice 1 *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle suivante :* $1/(X^4-1)$.

Exercice 2 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n *pour tout entier naturel* n.

Exercice 3 *Soit* A *une matrice carrée telque* $A^{2016} = 0$ *et* $A^{2015} \neq 0$.

1. *Calculer le polynôme minimal de* A.
2. *A est -elle diagonalisable ? Justifier par deux méthodes différentes.*

Exercice 4 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* 3 *tel que,* $A^3 - 3A^2 = -2A$.

1. *Trouver les valeurs propres possible de* A.
2. *Déduire que* A *est diagonalisable.*

Exercice 5

1. *Caractériser une matrice qui est à la fois diagonalisable et nilpotente.*
2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé et* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée telque pour tout* $i = 1, \ldots, n$, *on a* $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} = \lambda$.
   Donner un vecteur propre de la matrice A.
3. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *une matrice carrée diagonalisable. Montrer qu'il existe une matrice carrée* $B \in M_n(\mathbb{C})$ *telque* $B^2 = A$.

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès
Année Universitaire 2015-2016

Examen d'Algèbre II
Durée 2h

Exercice 1 *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle suivante :* $1/(X^4-1)$.

Exercice 2 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n *pour tout entier naturel* n.

Exercice 3 *Soit* A *une matrice carrée telque* $A^{2016} = 0$ *et* $A^{2015} \neq 0$.

1. *Calculer le polynôme minimal de* A.
2. *A est -elle diagonalisable ? Justifier par deux méthodes différentes.*

Exercice 4 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* 3 *tel que,* $A^3 - 3A^2 = -2A$.

1. *Trouver les valeurs propres possible de* A.
2. *Déduire que* A *est diagonalisable.*

Exercice 5

1. *Caractériser une matrice qui est à la fois diagonalisable et nilpotente.*
2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé et* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée telque pour tout* $i = 1, \ldots, n$, *on a* $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} = \lambda$.
   Donner un vecteur propre de la matrice A.
3. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *une matrice carrée diagonalisable. Montrer qu'il existe une matrice carrée* $B \in M_n(\mathbb{C})$ *telque* $B^2 = A$.

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès
Année Universitaire 2015-2016

Examen d'Algèbre II
Durée 2h

Exercice 1 *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle suivante :* $1/(X^4-1)$.

Exercice 2 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n *pour tout entier naturel* n.

Exercice 3 *Soit* A *une matrice carrée telque* $A^{2016} = 0$ *et* $A^{2015} \neq 0$.

1. *Calculer le polynôme minimal de* A.
2. *A est -elle diagonalisable ? Justifier par deux méthodes différentes.*

Exercice 4 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* 3 *tel que,* $A^3 - 3A^2 = -2A$.

1. *Trouver les valeurs propres possible de* A.
2. *Déduire que* A *est diagonalisable.*

Exercice 5

1. *Caractériser une matrice qui est à la fois diagonalisable et nilpotente.*
2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé et* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée telque pour tout* $i = 1, \ldots, n$, *on a* $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} = \lambda$.
   Donner un vecteur propre de la matrice A.
3. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *une matrice carrée diagonalisable. Montrer qu'il existe une matrice carrée* $B \in M_n(\mathbb{C})$ *telque* $B^2 = A$.

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès
Année Universitaire 2015-2016

Examen d'Algèbre II
Durée 2h

Exercice 1 *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle suivante :* $1/(X^4-1)$.

Exercice 2 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n *pour tout entier naturel* n.

Exercice 3 *Soit* A *une matrice carrée telque* $A^{2016} = 0$ *et* $A^{2015} \neq 0$.

1. *Calculer le polynôme minimal de* A.
2. *A est -elle diagonalisable ? Justifier par deux méthodes différentes.*

Exercice 4 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* 3 *tel que,* $A^3 - 3A^2 = -2A$.

1. *Trouver les valeurs propres possible de* A.
2. *Déduire que* A *est diagonalisable.*

Exercice 5

1. *Caractériser une matrice qui est à la fois diagonalisable et nilpotente.*
2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé et* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée telque pour tout* $i = 1, \ldots, n$, *on a* $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} = \lambda$.
   Donner un vecteur propre de la matrice A.
3. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *une matrice carrée diagonalisable. Montrer qu'il existe une matrice carrée* $B \in M_n(\mathbb{C})$ *telque* $B^2 = A$.